$\boxed{1}$

(1)

$\boxed{ア}\dfrac{5}{36}$ $\boxed{イ}\dfrac{7}{72}$

解説

要素の数が少ない **A** を中心に考えると扱いやすい。

A $\{2,3,5,7,11,13\}$

B $\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23\}$ より，

全事象は $6\times 12=72$ 通り

$\boxed{ア}$

差が 2 となるのは $(A,B)=(3,1),(3,5),(5,3),(5,7),(7,5),(7,9),(11,9),(11,13),(13,11),(13,15)$ の 10 通り

よって，求める確率 $=\dfrac{10}{72}=\dfrac{5}{36}$

$\boxed{イ}$

差が 10 となるのは $(A,B)=(3,13),(5,15),(7,17),(11,1),(11,21),(13,3),(13,23)$ の 7 通り

よって，求める確率 $=\dfrac{7}{72}$

(2)

$\boxed{ウ}\dfrac{1}{3}$ $\boxed{エ}\dfrac{7}{36}$

解説

$\boxed{ウ}$

和が 3 の倍数になるのは，

a が 2 のとき，B $\{1,7,13,19\}$ ←**B** は公差 **6** の等差数列であることに気がつく

a が 3 のとき，B $\{3,9,15,21\}$

a が 5 のとき，B $\{1,7,13,19\}$

a が 7 のとき，B $\{5,11,17,23\}$

a が 11 のとき，B $\{1,7,13,19\}$

a が 13 のとき，B $\{5,11,17,23\}$

の 24 通り

よって，求める確率 $=\dfrac{24}{72}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{エ}$

和が 5 の倍数になるのは，

a が 2 のとき，B $\{3,13,23\}$ ←**B は公差 10 の等差数列であることに気がつく**

a が 3 のとき，B $\{7,17\}$

a が 5 のとき，B $\{5,15\}$

a が 7 のとき，B $\{3,13,23\}$

a が 11 のとき，B $\{9,19\}$

a が 13 のとき，B $\{7,17\}$

の 14 通り

よって，求める確率$=\dfrac{14}{72}=\dfrac{7}{36}$

補足

a，b を 3 で割ったときのそれぞれの余りの和が 3 の倍数なら $a+b$ は 3 の倍数，5 で割ったときのそれぞれ余りの和が 5 の倍数なら $a+b$ は 5 の倍数であることを使って解く方法もあるが時間がかかる。試験時間が 60 分しかないことを考慮すれば，出題者もそのような解法は期待していないだろう。

(3)

$\boxed{オ}\dfrac{1}{8}$　$\boxed{カ}\dfrac{5}{18}$

解説

$\boxed{オ}$

$3\leq a+b\leq 36$ だから，

$\sqrt{a+b}$ が整数であるためには，

$a+b=4$，9，16，25，36 より，

$b=4-a$，$9-a$，$16-a$，$25-a$，$36-a$

a が 2 のとき，B $\{7,23\}$

a が 3 のとき，B $\{1,13\}$

a が 5 のとき，B $\{11\}$

a が 7 のとき，B $\{9\}$

a が 11 のとき，B $\{5\}$

a が 13 のとき，B $\{3,23\}$

の 9 通り

よって，求める確率$=\dfrac{9}{72}=\dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{カ}}$

$2 \leq a \leq 13$， $-23 \leq -b \leq -1$ より，

$-21 \leq a + (-b) \leq 12$

$0 \leq |a-b| \leq 21$

よって，

$\sqrt{|a-b|}$ が整数であるためには，

$|a-b| = 0$，1，4，9，16

であればよい。

$a - b = 0$， ± 1， ± 4， ± 9， ± 16 より，

$b = a$， $a \pm 1$， $a \pm 4$， $a \pm 9$， $a \pm 16$

だから，

a が 2 のとき，B $\{3,1,11\}$

a が 3 のとき，B $\{3,7,19\}$

a が 5 のとき，B $\{5,9,1,21\}$

a が 7 のとき，B $\{7,11,3,23\}$

a が 11 のとき，B $\{11,15,7\}$

a が 13 のとき，B $\{13,17,9\}$

の 20 通り

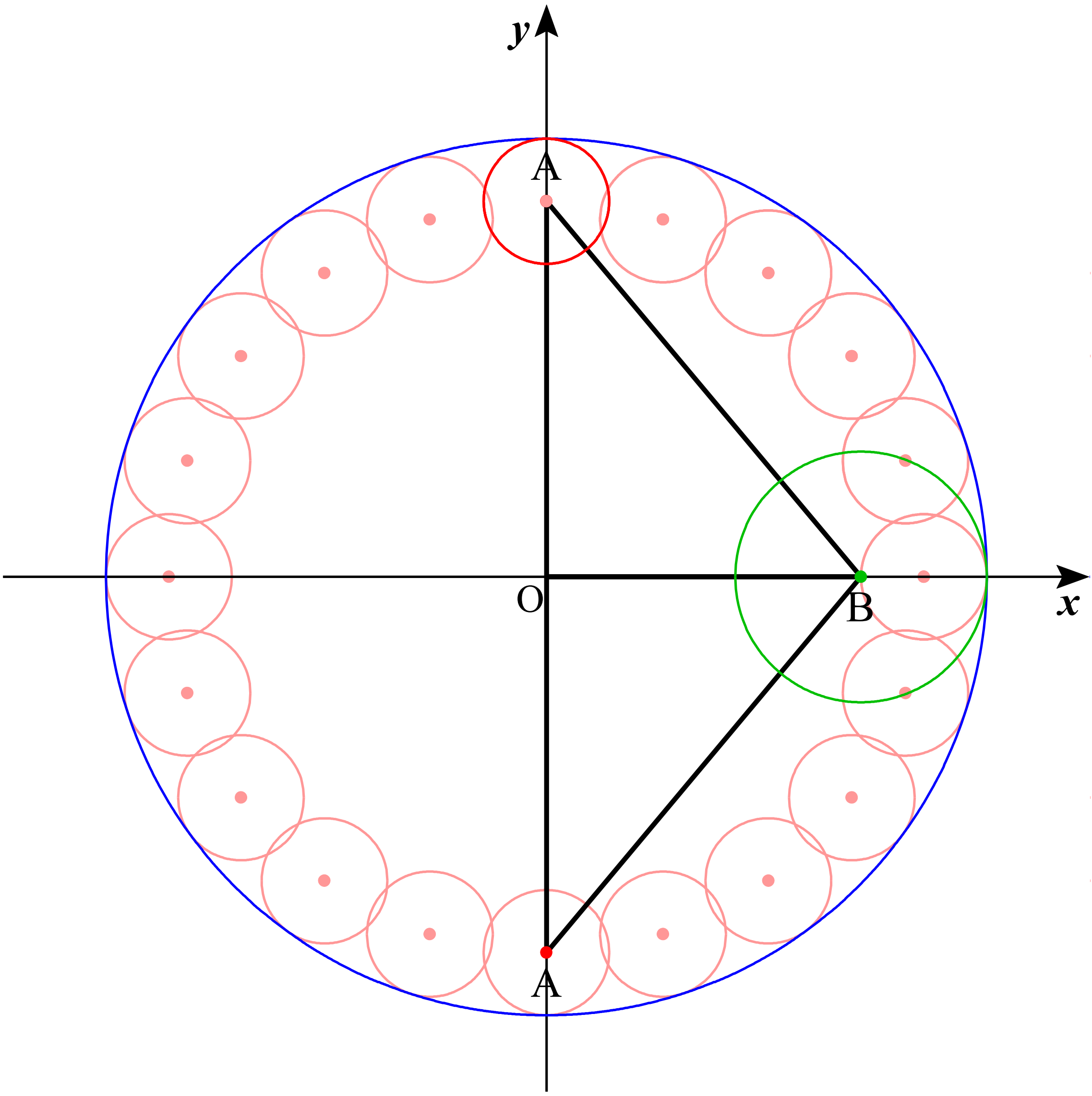
よって，求める確率 $= \dfrac{20}{72} = \dfrac{5}{18}$

$\boxed{2}$

(1)

点 A の座標が$(0,\pm 6)$のとき，△OAB の面積は最大値 15 をとる。

解説



OB を底辺とすると，OB＝5 より，

△OAB の面積が最大になるのは，高さが最大 のときである。

よって，$\mathrm{A}(0,\pm 6)$

また，このとき，△OAB の面積$=\frac{1}{2}\times 5\times 6=15$

(2)

(a)

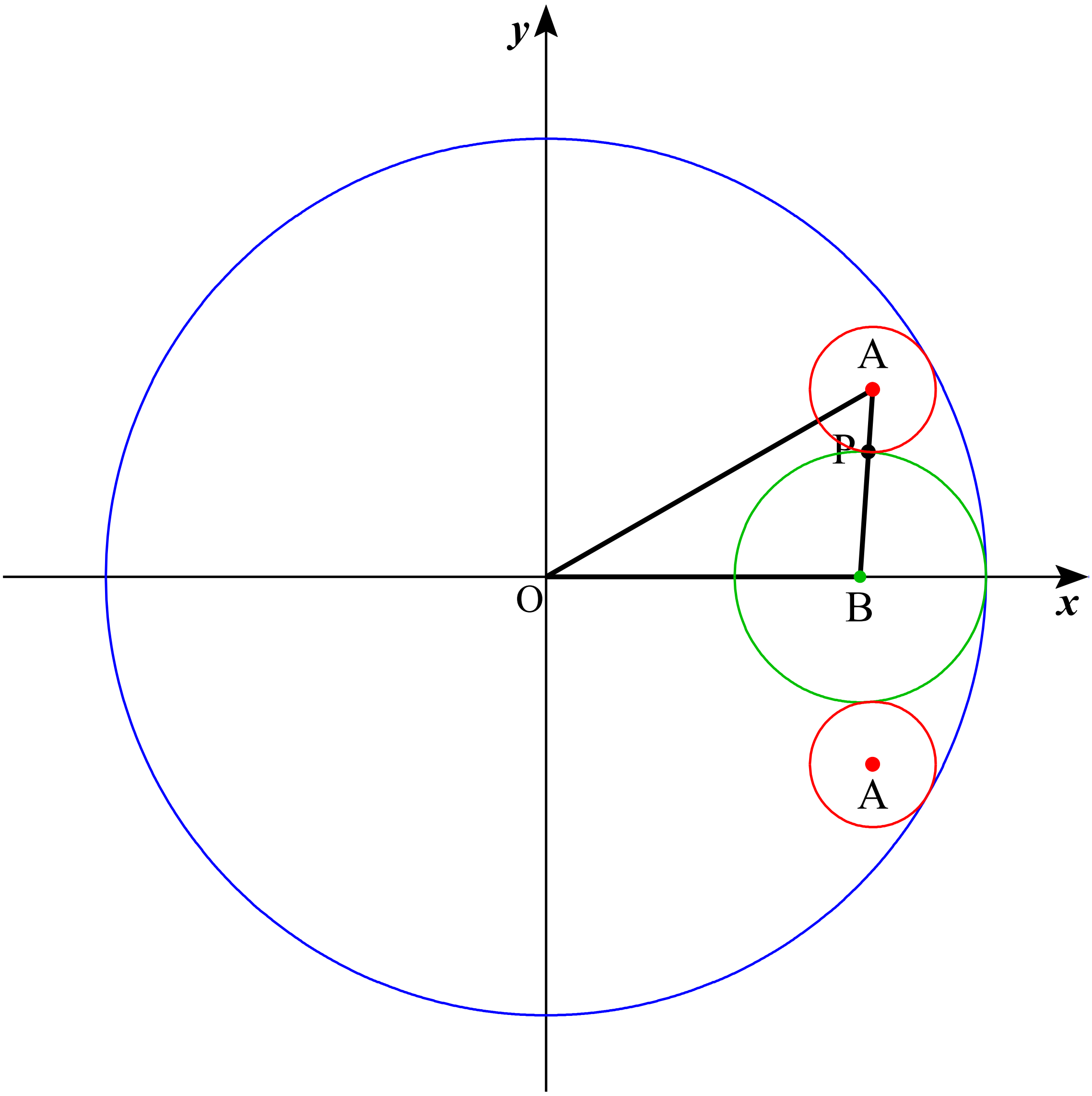
$\Delta\mathrm{OAB}=2\sqrt{14}$

(b)

$\mathrm{A}(a,b)=\left(\dfrac{26}{5},\pm\dfrac{4\sqrt{14}}{5}\right)$

(c)

$\mathrm{P}(c,d)=\left(\dfrac{77}{15},\pm\dfrac{8\sqrt{14}}{15}\right)$



解説

(a)

$\mathrm{OA}=6$， $\mathrm{OB}=5$， $\mathrm{AB}=1+2=3$ より，

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}\\
&= \frac{1}{2}\times 6\times 5\times\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}\\
&= 15\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}\right)^2}\\
&= 15\sqrt{1-\left(\frac{13}{15}\right)^2}\\
&= \sqrt{15^2-13^2}\\
&= \sqrt{56}\\
&= 2\sqrt{14}
\end{aligned}
$$

(b)

条件を満たす点 A は 2 点あり， y 軸について互いに対称だから，

$\mathrm{A}(\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{AOB},\pm\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{OAB})=(6\cos\angle\mathrm{AOB},\pm6\sin\angle\mathrm{OAB})$

(a)の解説より，

$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{13}{15}$， $\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2\sqrt{14}}{15}$

よって， $\mathrm{A}(a,b)=\left(\dfrac{26}{5},\pm\dfrac{4\sqrt{14}}{5}\right)$

(c)

点 P は AB を 1 : 2 に内分する点だから，

$$
\mathrm{P}(c,d)=\left(\frac{2\times\frac{26}{5}+1\times5}{2+1},\frac{2\times\pm\frac{4\sqrt{14}}{5}+1\times0}{2+1}\right)=\left(\frac{77}{15},\pm\frac{8\sqrt{14}}{15}\right)
$$

3

(1)

$s=3^x>0$

$\therefore s>0$　・・・(答)

$f(x)=3^{3x}-6\times 3^{2x}-33\times 3^x$

$=(3^x)^3-6\times(3^x)^2-33\times 3^x$

$=s^3-6s^2-33s$

$\therefore F(s)=s^3-6s^2-33s$　・・・(答)

(2)

$f(x)=0$ のとき，$F(s)=0$ だから，

これを解くと，

$s^3-6s^2-33s=s(s^2-6s-33)=0$，$s>0$ より，

$s=3+\sqrt{42}$

よって，

$3^x=3+\sqrt{42}$

ゆえに，

$x=\log_3(3+\sqrt{42})$　・・・(答)

(3)

$3^x>0$，$3^{-x}>0$ より，

$\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}\geq\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=1$ （相加平均≥相乗平均）

$\therefore 3^x+3^{-x}\geq 2$ （$3^x+3^{-x}=2$ となるのは，$3^x=3^{-x}$，すなわち $x=0$ のとき）

よって，

$t\geq 2$　・・・(答)

$$\begin{aligned}
g(x)&=f(x)+f(-x)+204\\
&=(3^{3x}-6\times 3^{2x}-33\times 3^x)+(3^{-3x}-6\times 3^{-2x}-33\times 3^{-x})+204\\
&=(3^{3x}+3^{-3x})-6(3^{2x}+3^{-2x})-33(3^x+3^{-x})+204\\
&=\{(3^x)^3+(3^{-x})^3\}-6\{(3^x)^2+(3^{-x})^2\}-33t+204\\
&=(3^x+3^{-x})\{(3^x)^2-3^x\cdot 3^{-x}+(3^{-x})^2\}-6\{(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}\}-33t+204\\
&=t\{(3^x+3^{-x})^2-3\cdot 3^x\cdot 3^{-x}\}-6(t^2-2)-33t+204\\
&=t(t^2-3)-6t^2+12-33t+204\\
&=t^3-6t^2-36t+216
\end{aligned}$$

よって，

$G(t)=t^3-6t^2-36t+216$　・・・(答)

(4)

$g(x)=0$ のとき，$G(t)=0$ だから，

これを解くと，

$$\begin{aligned} t^3-6t^2-36t+216 &= t^2(t-6)-36(t-6) \\ &= (t-6)(t^2-36) \\ &= (t+6)(t-6)^2=0 \end{aligned}$$

$t \geq 2$ より，

$t=6$

よって，

$3^x+3^{-x}=6$

$3^x=s$ より，

$s+\dfrac{1}{s}=6 \quad (s>0)$

$s^2-6s+1=0$

$s=3\pm 2\sqrt{2}$

$3^x=3\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x=\log_3\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)$　・・・（答）